I Mühazirə

Diferensiallanan çoxobrazlı anlayışı. Diferensiallanan çoxobrazlıların hamar inikasları

Tutaq ki, $M-$hesabi bazaya malik Hausdorf topoloji fəzasıdır. $U \subset M$ açıq çoxluğuna baxaq. $\varphi : U \to R^n$ homeomorfizminə M topoloji fəzası üzərində təyin edilmiş $n-$ölçülü lokal xəritə (və ya lokal koordinat sistemi) deyilir. U çoxluğu lokal xəritənin oblastı adlanır. Lokal xəritənin özünü (U, φ) şəklində işarə edirlər.

Tutaq ki, M topoloji fəzası üzərində $n-$ölçülü iki (U, φ) və (V, ψ) lokal xəritələri verilmişdir. Əgər

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V),$$

$$\varphi \circ \psi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

Inikasları hamar inikaslardırsa, o halda deyirlər ki, (U, φ) və (V, ψ) hamar əlaqələndirilmiş lokal xəritələrdir. $U \cap V = \varnothing$ olduqda $\psi \circ \varphi^{-1}, \varphi \circ \psi^{-1}$ inikasları tətin olunmurlar. Bu halda (U, φ) və (V, ψ) lokal xəritələrinin hamar əlaqələndirilmiş olduqlarını qəbul edirik.

Tutaq ki, (U, φ)-M topoloji fəzası üzərində $n-$ölçülü lokal xəritədir. $P \in U$ nöqtəsinin (U, φ) lokal xəritəsinə nəzərən lokal koordinatları dedikdə $\varphi(P) \in R^n$ nöqtəsinin koordinatları başa düşülür. Bu koordinatları $\left(x^1(P), x^2(P), ..., x^n(P)\right)$ kimi işarə edəcəyik.

Tutaq ki, M topoloji fəzası üzərində $n-$ölçülü iki (U, φ) və (V, ψ) lokal xəritələri verilmişdir və $U \cap V \neq \varnothing.$ Əgər $P \in U \cap V$ olarsa, onda $\psi \circ \varphi^{-1}$ inikası $\varphi(P) = \left(x^1(P), ..., x^n(P)\right)$ nöqtəsini $\psi(P) = \left(y^1(P), ..., y^n(P)\right)$ çevirir, belə ki, burada $y^1, ..., y^n$ n sayda $x^1, ..., x^n$ dəyişənlərindən asılı funksiyalardır:

$$y^i = f^i(x^1,...,x^n), 1 \le i \le n.$$

Aşağıdakı şərtlər ödənildikdə M topoloji fəzası üzərində təyin olunmuş $n-$ölçülü lokal xəritələrin $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_A$ ailəsinə M topoloji fəzası üzərində $n-$ölçülü hamar atlas (və ya diferensiallanan struktur) deyilir:

1) atlasa daxil olan istənilən iki xəritə hamar əlaqələndirilmişdir;
2) $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M,$ yəni atlasın bütün lokal xəritələrinin oblastları M topoloji fəzasını örtürlər.

Üzərində $n-$ölçülü hamar atlasın təyin olunduğu M topoloji fəzasına $n-$ölçülü hamar (və ya diferensiallanan) çoxobrazlı deyılir.

Tutaq ki, $M-m-$ölçülü, $N-n-$ölçülü hamar çoxobrazlıdır. $f: M \to N$ kəsilməz inikasına baxaq. $(U,\varphi)-M$ çoxobrazlısı üzərində, $(V,\psi)-N$ çoxobrazlısı üzərində lokal xəritələr olsun. $f^{-1}(V)$ alt çoxluğu $M-$də açıq çoxluqdur. $U \cap f^{-1}(V) \neq \varnothing$ olduqda

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \to \psi(V) \qquad (1)$$

Inikasını qurmaq mümkündür. Bu inikas zamanı $P \in U \cap f^{-1}(V)$ nöqtəsinin (U,φ) lokal xəritəsinə nəzərən koordinatlarından ibarət olan $(x^1,...,x^m)$ ədədlər sətrinə $f(P)$ nöqtəsinin (V,ψ) lokal koordinatlarından ibarət olan $(y^1,...,y^n)$ sətri qarşı qoyulur.

(1) inikasına $f: M \to N$ inikasının (U,φ) və (V,ψ) lokal xəritələrinə nəzərən koordinat ifadəsi deyilir.

Əgər uyğun olaraq, M və N çoxobrazlıları üzərində verilən ixtiyari (U,φ) və (V,ψ) lokal xəritələrinə nəzərən (1) koordinat ifadəsi hamar inikas olarsa, onda $f: M \to N$ kəsilməz inikası hamar inikas adlanır. Bu zaman $U \cap f^{-1}(V) = \varnothing$ olduqda, koordinat ifadəsinin hamar olması qəbul olunur.

Teorem 1. Kəsilməz $f: M \to N$ inikasının hamar olması üçün zəruri və kafi şərt hər bir $P \in M$ nöqtəsi üçün uyğun olaraq, M və N çoxobrazlıları üzərində elə (U, φ) və (V, ψ) lokal xəritələrinin varlığıdar ki, $P \in U, f(P) \in V$ və bu xəritələr üçün $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ koordinat ifadəsi $\varphi(P)$ nöqtəsində hamardır.

Aşağıdakı şərtlər ödənildikdə, $f: M \to N$ inikası difeomorfizm adlanır:

1) $f-$homeomorfizmdir;

2) f və f^{-1} hamar inikaslardır.

Məsələn, səthlərin istənilən difeomorfizmi çoxobrazlıların difeomorfizmidir. Digər tərəfdən, əgər $(U, \varphi) - M$ hamar çoxobrazlısı üzərində lokal xəritədirsə, onda göstərmək olur ki, $\varphi: U \to \varphi(U)$ inikası difeomorfizmdir.

II Mühazirə

Diferensiallanan çoxobrazlı üzərində toxunan və kotoxunan vektorlar

Tutaq ki, $M - n-$ölçülü hamar çoxobrazlı, I isə R ədəd oxunun açıq intervalıdır. Aşkardır ki, I açıq intervalı $R-$də açıq alt çoxobrazlı kimi bir ölçülü çoxobrazlıdır. Ona görə də $\gamma: I \to M$ inikasının hamarlığını çoxobrazlıların hamar inikası şəklində başa düşmək olar.

M çoxobrazlısı üzərində hamar əyri (və ya sadəcə əyri) $\gamma : I \to M$ hamar inikasına deyilir. Əgər $t_0 \in I$ üçün $\gamma(t_0) = P$ olarsa, onda deyirlər ki, əyri $t = t_0$ olduqda P nöqtəsindən keçir.

Əgər $(U,\varphi) - M$ çoxobrazlısı üzərində lokal xəritədirsə və $\gamma : I \to M$ əyrisi üçün $\gamma(I) \subset U$ olarsa, onda R^n fəzasının $\varphi(U)$ oblastında $\widetilde{\gamma} = \varphi \circ \gamma : I \to \varphi(U)$ əyrisinə γ əyrisinin (U,φ) xəritəsinin lokal koordinatlarında verilməsi deyilir.

(U,φ) lokal xəritəsinin verilməsi ilə $P \in U$ nöqtəsindən keçən hər bir hamar γ əyrisinə $\widetilde{\gamma} : I_\varepsilon \to \varphi(U)$ əyrisinin t_0 nöqtəsində sürət vektoru olan

$$\frac{d\widetilde{\gamma}(t_0)}{dt} = \left\{ \frac{du^1(t_0)}{dt}, \ldots, \frac{du^n(t_0)}{dt} \right\}$$

vektorunu qarşı qoymaq olur, burada $I_\varepsilon = \left]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon\right[, \varepsilon > 0.$

M çoxobrazlısı üzərində P nöqtəsindən keçən iki hamar əyri üçün bu əyrilərə yuxarıdakı qaydada qarşı qoyulan vektorlar üst-üstə düşürlərsə, onda deyirlər ki, verilən hamar əyrilər P nöqtəsində bir-birinə toxunurlar.

M çoxobrazlısı üzərində P nöqtəsində bir-birinə toxunan hamar əyrilərin ekvivalentlik sinfinə P nöqtəsində M çoxobrazlısına toxunan vektor deyilir.

P nöqtəsində M çoxobrazlısına toxunan vektorlar çoxluğu $T_P M$ kimi işarə olunur. $T_P M$ $n-$ölçülü vektorlar fəzasıdır və P nöqtəsində M çoxobrazlısına toxunan fəza adlanır.

R^n fəzasının $e_1, \ldots, e_n$ kanonik bazisinə $T_P M$ toxunan fəzasında uyğun gələn bazisi hərəkətli bazis adlandırırlar və $\partial_{1P}, \ldots, \partial_{nP}$ kimi işarə edirlər.

Tutaq ki, $M-n-$ölçülü hamar çoxobrazlı, $v\in T_PM-P$ nöqtəsində toxunan vektor, $\gamma: I\to M-t=t_0$ olduqda P nöqtəsindən keçən elə hamar əyridir ki, $v=[\gamma]$, burada $[\gamma]-\gamma$ əyrisi ilə təyin olunan ekvivalentlik sinfidir. $P\in O_f\subset M$ çərtini ödəyən açıq O_f alt çoxluğunda təyin olunmuş hamar $f: O_f\to R$ funksiyasına baxaq. $(U,\varphi), P\in U$ lokal xəritəsini daxil edək. Onda γ əyrisi $\tilde{\gamma}=\varphi\circ\gamma$ əyrisinin lokal koordinatlarında təyin olunur, f funksiyasına isə $\tilde{f}=f\circ\varphi^{-1}$ şəklində işarə edəcəyimiz $f\circ\varphi^{-1}:\varphi(U\cap O_f)\to R$ koordinat ifadəsi uyğun gəlir.

$v\in T_PM$ toxunan vektorunun köməyi ilə P nöqtəsinin ətrafında təyin olunmuş hər bir hamar f funksiyasına

$$D_v f=\frac{d(f\circ\gamma)(t_0)}{dt}=\left.\frac{\partial\tilde{f}}{\partial u^i}\right|_{\varphi(P)}\frac{du^i(t_0)}{dt}$$

ədədini qarşı qoymaq olur.

$C^\infty(P)=\{f: O_f\to R|$, O_f-açıq çoxluqdur, $f-$hamar funksiyadır $\}$

çoxluğuna baxaq. Beləliklə, $D_v: C^\infty(P)\to R: f\to D_v f$ inikası qurulmuş oldu, burada $v\in T_PM$. Göstərmək olur ki, D_v inikası aşağıdakı xassələrə malikdir:

$$\forall f,g\in C^\infty(P),\alpha\in R\ ,\quad D_v(f+g)=D_v(f)+D_v(g),\quad D_v(\alpha f)=\alpha D_v(f), \tag{1}$$

$$D_v(fg)=f(P)D_v(g)+g(P)D_v(f). \tag{2}$$

Sonuncu bərabərliyə Nyuton-Leybnis qaydası deyirlər. Beləliklə, D_v-xətti inikasdır.

(1), (2) bərabərliklərini ödəyən $D: C^\infty(P)\to R$ inikasına diferensiallanma deyilir. Beləliklə, istənilən $v\in T_PM$ toxunan vektoru D_v diferensiallanmasını təyin edir.

Göstərmək olur ki, $D_P = \{D : C^{\infty}(P) \to R\}$ diferensiallanmalar çoxluğu R həqiqi ədədlər meydanı üzərində vektorlar fəzasıdır.

Teorem. *Toxunan fəzanın diferensiallanmalar fəzasına $T_v M \to D_P : v \to D_v$ inikası xətti izomorfizmdir.*

Bu teoremə əsasən, ixtiyari v toxunan vektoru D_v diferensiallanması ilə eyniləşdirilir. Qeyd edək ki, $D_v -$yə v toxunan vektoru boyunca diferensiallanma, $D_v f -$ə isə f hamar funksiyasının v toxunan vektoru boyunca törəməsi deyilir:

$$D_v f = \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_P v^i .$$

III Mühazirə

Diferensiallanan çoxobrazlı üzərində vektor və tenzor meydanları

Tutaq ki, $M - n -$ölçülü hamar çoxobrazlıdır, A isə $M -$də açıq alt çoxobrazlı kimi başa düşülən açıq alt çoxluqdur (xüsusi halda $A = M$).

$A \subset M$ açıq alt çoxluğu üzərində vektor meydanı dedikdə hər bir $P \in A$ nöqtəsinə $X_P \in T_P A \cong T_P M$ toxunan vektorunu qarşı qoyan X inikası başa düşülür.

Tutaq ki, $X, Y - A$ açıq alt çoxluğu üzərində vektor meydanlarıdır, f isə A üzərində funksiyadır. A üzərində $X + Y$ və fX vektor meydanlarını aşağıdakı kimi təyin edirik:

$$\forall P \in A, (X+Y)_P = X_P + Y_P, \quad (fX)_P = f(P)X_P. \tag{1}$$

Vektor meydanının hamarlığı anlayışını daxil edək. Əgər A üzərində (U,φ) lokal xəritəsi seçilərsə, onda $P \in U$ şərti daxilində hər bir toxunan $T_P M$ toxunan fəzasında $\partial_{1P},...,\partial_{nP}$ hərəkətli bazisi təyin olunar. Əgər $P \in U$ nöqtəsini dəyişsək, nəticədə U üzərində n sayda ∂_i vektor meydanlarını almış olarıq. U üzərində verilmiş X vektor meydanı üçün hər bir X_P toxunan vektorunu hərəkətli bazis üzrə ayırmaq olar: $X_P = f^1(P)\partial_{1P} + \cdots + f^n(P)\partial_{nP}$, burada $f^1(P),...,f^n(P)$ ilə X_P toxunan vektorunun koordinatları işarə olunmuşdur.

Əgər $P \in U$ nöqtəsini dəyişsək, nəticədə (1) əməllərinə əsasən,

$$X = f^1\partial_1 + \cdots + f^n\partial_n \tag{2}$$

ayrılışını alarıq, burada $f^1,...,f^n - U$ üzərində funksiyalardır.

(2) bərabərliyindəki $f^1,....,f^n$ funksiyalarına U üzərindəki X vektor meydanının (U,φ) lokal xəritəsinə nəzərən komponentləri deyilir.

Əgər $A \subset M$ açıq alt çoxluğu üzərində X vektor meydanının M çoxobrazlısı üzərindəki istənilən (U,φ) lokal xəritəsinə nəzərən komponentləri $U \cap A$ üzərində hamar funksiyalardırsa, onda X hamar vektor meydanı adlanır.

Göstərmək olur ki, iki hamar vektor meydanının cəmi və hamar vektor meydanının hamar funksiyaya hasilı hamar vektor meydanlarıdır. Doğrudan da, əgər $X = f^i\partial_i, Y = g^i\partial_i -$hamar vektor meydanları, $f-$hamar funksiyadırsa, onda

$$X + Y = (f^i + g^i)\partial_i, fX = ff^i\partial_i,$$

və hamar funksiyaların cəmi, eləcə də hasili hamar funksiyalardır.

$A \subset M$ açıq alt çoxluğu üzərində təyin olunmuş bütün hamar vektor meydanları çoxluğunu $\mathrm{X}(A)$ kimi işarə edirik. $X \in \mathrm{X}(A)$ vektor meydanı $(D_X f)(P) = D_{X_P} f$ qaydası ilə $D_X : C^\infty(A) \to C^\infty(A) : f \to D_X f$ inikasını təyin edir. Bu inikas aşağıdakı xassələrə malikdir:

$$\forall f, g \in C^\infty(A), \forall \alpha \in R, \quad D_X(f+g) = D_X f + D_X g,$$
$$D_X(\alpha f) = \alpha D_X f, \quad D_X(fg) = f D_X g + g D_X f.$$

Tutaq ki, $X, Y \in \mathrm{X}(A)$ vektor meydanları verilmişdir, burada $A - M -$də açıq alt çoxluqdur. A üzərində təyin olunmuş və ixtiyari (U, φ) lokal xəritəsinə nəzərən komponentləri $[X,Y]_U = (f^i \partial_i g^j - g^i \partial_i f^j)\partial_j$ şəklində olan vektor meydanına X və Y vektor meydanlarının kommutatoru deyilir və $[X,Y]$ kimi işarə olunur. Aşkardır ki, hərəkətli bazisin vektor meydanları üçün, $[\partial_i, \partial_j] = 0.$

Teorem. Kommutasiya əməli aşağıdakı xassələrə malikdir:

a) $[X,Y] = -[Y,X]$, xüsusi halda $[X,X] = 0;$

b) $\forall \alpha, \beta \in R$, $[\alpha X_1 + \beta X_2, Y] = \alpha[X_1, Y] + \beta[X_2, Y].$

IV Mühazirə

Li qrupları

Li qrupu eyni zamanda diferensiallanan çoxobrazlı olan elə G qrupuna deyilir ki, $G \times G \ni (a,b) \mapsto ab^{-1} \in G$ qrup əməliyyatı $G \times G$ çoxluğundan G-yə diferensiallanan inikas olsun. [5]. L_a (uyğun olaraq, R_a ilə) ilə G qrupu üzərində $a \in G$ elementinin doğurduğu sol (sağ) sürüşmələri işarə edək:

$\forall x \in G$ üçün $L_a x = ax$ $(R_a x = xa)$. $a \in G$ üçün ada G-də

$(ad\, a)x = axa^{-1}, \forall x \in G$

şəklində təyin olunan daxili avtomorfizmidir.

Tutaq ki, GL(n,R)-bütün həqiqi cırlaşmayan $n \times n$ tərtibli $A = (a_j^i)$ matrislərinin qrupudur. Hasil əməli

$$(A \cdot B)_j^i = \sum_{k=1}^{n} a_k^i b_j^k$$

şəklində verilir. Gl(n,R) R^{n^2} fəzasında açıq altçoxluq, eləcə də açıq altçoxobrazlı kimi baxıla bilər. Bu diferensiallanan struktura nəzərən Gl(n,R) Li qrupudur.

Tutaq ki, G Li qrupu və M hamar çoxobrazlısı verilmişdir. Aşağıdakı şərtlər ödənildikdə deyirlər ki, G M çoxobrazlısı üzərində çevirmələrin Li qrupudur, və ya G M üzərində təsir edir (diferensiallanan şəkildə) [5]:

1) hər bir $a \in G$ elementi M-də $x \mapsto xa$ kimi işarə olunan çevirməni doğurur, burada $x \in M$;
2) $G \times M \ni (a,x) \mapsto xa \in M$ diferensiallanan inikasdır;
3) bütün $a, b \in$ G və $x \in M$ üçün $x(ab) = (xa)b$.

Əgər bütün $x \in M$ üçün $R_a x = x$ münasibətindən a=e alınırsa, onda deyirlər ki, G M üzərində effektiv (sərbəst) təsir edir.

V Mühazirə

Baş laylanma fəzası. Xətti reperlərin laylanması

Tutaq ki, M-C^∞ sinfindən olan n-ölçülü diferensiallanan çoxobrazlı, G-Li qrupudur. M çoxobrazlısı üzərində qrupu G olan baş laylanma fəzası, və ya qısa şəkildə baş laylanma (diferensiallanan) P çoxobrazlısından ibarətdir və G-nin P üzərində təsiri aşağıdakı şərtləri ödəyir :

1) G P üzərində sağdan sərbəst təsir edir:

$$(u,a) \in P \times G \mapsto ua = R_a u \in P;$$

2) M-G qrupunun doğurduğu ekvivalentliyə nəzərən P üçün faktor fəzadır, M=P/G və kanonik π : P$\to$M proyeksiyası diferensiallanandır;
3) P lokal trivialdır, yəni hər bir x$\in$M nöqtəsinin elə U ətrafı vardır ki, $\pi^{-1}(u)$ U$\times$G çoxluğuna o mənada izomorfdur ki, $\psi(u) = (\pi(u), \varphi(u))$ münasibətini ödəyən $\psi : \pi^{-1}(u) \to U \times G$ difeomorfizmi vardır, burada φ $\pi^{-1}(u)$-dan G-yə təsir edən və bütün $u \in \pi^{-1}(u)$ və $a \in G$ üçün $\varphi(ua) = (\varphi(u))$ a şərtini ödəyən inikasdır.

Baş laylanma fəzası P(M, G, π), P(M,G) və ya sadəcə P kimi işarə olunur. P-yə total fəza, yaxud laylanmanın fəzası, M-ə laylanmanın bazis fəzası və ya bazası, G-yə struktur qrup, π-yə isə proyeksiya deyirlər. Hər bir $x \in M$ üçün $\pi^{-1}(x)$ P-də qapalı alt çoxobrazlı olub x nöqtəsi üzərində lay adlanır.

Tutaq ki, G Li qrupu və M çoxobrazlısı verilmişdir, eyni zamanda G qrupu P=M$\times$G üzərində sağdan bu şəkildə sərbəst təsir edir. Hər bir $b \in G$ üçün R_b $(x,a) \in M \times G$ cütünü $(x,ab) \in M \times G$ cütünə inikas etdirir. Bu şəkildə təyin olunan $P(M,G)$ baş laylanma fəzası trivial laylanma adlanır.

Baş laylanma fəzasının tərifindəki 3) şərtinə əsasən, P(M,G) baş laylanması üçün M üzərində $\{u_\alpha\}$ açıq örtüyünü seçmək olar, burada hər bir $\pi^{-1}(u_\alpha)$ çoxluğu $\pi^{-1}(u_\alpha)$-dan $U_\alpha \times G$-nin üzərində təsir edən elə $u \to (\pi(u), \varphi_\alpha(u))$ difeomorfizmi ilə təchiz edilmişdir ki, $\varphi_\alpha(ua) = (\varphi_\alpha(u))a$.

Əgər $u \in \pi^{-1}(u_\alpha \cap u_\beta)$ olarsa, onda

$$\varphi_\beta(ua)(\varphi_\alpha(ua))^{-1}=\varphi_\beta(u)(\varphi_\alpha(u))^{-1},$$

bu isə onu göstərir ki, $\varphi_\beta(u)\ (\varphi_\alpha(u))^{-1}$ yalnız π(u)-dan asılıdır, lakin u-dan asılı deyildir. Biz

$$\psi_{\beta\alpha}(\pi(u))=\varphi_\beta(u)(\varphi_\alpha(u))^{-1}$$

qaydası ilə $\psi_{\beta\alpha}:U_\alpha\cap U_\beta\to G$ inikasını təyin edə bilərik. $\psi_{\beta\alpha}$ inikasları ailəsi P(M,G) laylanmasının M üzərində $\{u_\alpha\}$ örtüyünə uyğun olan keçid funksiyaları ailəsi adlanır. Asanlıqla yoxlanılır ki,

$$x\in u_\alpha\cap u_\beta\cap u_\gamma \text{ üçün } \psi_{\gamma\alpha}(x)=\psi_{\gamma\beta}(x)\cdot\psi_{\beta\alpha}(x).$$

Laylanma fəzalarına dair nümunələrə baxaq.

I. Xətti reperlərin laylanması. Tutaq ki, M n-ölçülü hamar çoxobrazlıdır. $x\in M$ nöqtəsində U xətti reperi dedikdə $T_x(M)$ toxunan fəzasının nizamlanmış $X_1,...,X_n$ bazisi başa düşülür. L(M) ilə M çoxobrazlısının bütün nöqtələrində bütün xətti reperlərin çoxluğunu işarə edək və fərz edək ki, π-L(M) – -dən M-in üzərinə təsir edən elə inikasdır ki, bu inikas zamanı x nöqtəsinin U reperi x nöqtəsinə çevrilir. Gl(n,R) tam xətti qrupu L(M) üzərində sağdan bu şəkildə təsir edir. Əgər $a=(a_j^i)\in Gl(n,R)$ olarsa və $u=(X_1,...,X_n)$- x nöqtəsində xətti reperdirsə, onda ua tərifə görə x nöqtəsində $Y_j=\sum_i a_j^i X_i$ qaydası ilə təyin olunan $(Y_1,...,Y_n)$ xətti reperidir. Aşkardır ki, $Gl(n,R)$ $L(M)$ üzərində sərbəst təsir edir və $\pi(u)=\pi(v)$ münasibəti yalnız və yalnız müəyyən $a\in Gl(n,R)$ üçün $v=ua$ olduqda ödənilir. L(M)-də diferensiallanan struktur daxil etmək üçün, fərz edək ki, $(x^1,...,x^n)$-M-də U koordinat ətrafında lokal koordinat sistemidir. $x\in M$ nöqtəsində hər bir u reperi yeganə qaydada $X_\alpha=X_\alpha^k\frac{\partial}{\partial x^k}$ olmaqla $U=(X_1,...,X_n)$ şəklində təsvir oluna bilər, burada (X_α^k)-qeyri məxsusi matrisdir. Bu onu göstərir ki, $\pi^{-1}(u)$

çoxluğu $U \times Gl(n,R)$ ilə biyektiv uyğunluqdadır. $\pi^{-1}(u)$ ətrafında lokal koordinat sistemi olaraq, (x^i) və (X^i_α)-nı götürməklə $L(M)$-i diferensiallanan çoxobrazlıya çevirə bilərik. Bu mühakimələr göstərir ki, $L(M)$ $(M, Gl(n,R))$ baş laylanmadır. $L(M)$-ə M çoxobrazlısı üzərində xətti reperlərin laylanması deyilir.

Əgər (x^i) və $(x^{i'})$-M çoxobrazlısında

$$x^{i'} = x^{i'}\left(x^1, ..., x^n\right)$$

çevirməsi ilə bağlı olan lokal koordinat sistemləridirsə, onda $L(M)$ laylanmasında $\left(x^i, X^i_\alpha\right)$ və $\left(x^{i'}, X^{i'}_\alpha\right)$ indusirə olunmuş koordinat sistemləri üçün

$$\begin{cases} x^{i'} = x^{i'}\left(x^1, ..., x^n\right), \\ X^{i'}_\alpha = A^{i'}_i X^i_\alpha \end{cases} \tag{1}$$

çevirməsini yaza bilərik. Buradan aydın olur ki, $L(M) - n + n^2$ ölçülü hamar çoxobrazlıdır. $x^{i_\alpha} = X^i_\alpha,\ i_\alpha = \alpha \cdot n + i$ qəbul etməklə, (1) çevirməsini

$$x^{I'} = x^{I'}\left(x^I\right)$$

şəklində yazmaq olar, burada

$$I = 1,2,...,n+n^2,\ x^I = \left(x^i, x^{i_\alpha}\right).$$

(1) çevirməsinin Yakobi matrisi aşağıdakı struktura malikdir:

$$\left(\frac{\partial x^{I'}}{\partial x^I}\right) = \begin{pmatrix} A^{i'}_i & o \\ X^j_\alpha \partial_i A^{j'}_j & A^{i'}_i \delta^\beta_\alpha \end{pmatrix},$$

burada δ^β_α -Kroneker simvoludur, $\partial_i A^{i'}_j = A^{i'}_{ij} = \dfrac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^j \partial x^i}$.

VI Mühazirə

Baş laylanma fəzasında rabitələr

Tutaq ki, $P(M,G)-M$ çoxobrazlısı üzərində qrupu G olan baş laylanmadır. $T_u(P)$ ilə u nöqtəsində $P-$yə toxunan fəzanı işarə edək. Fərz edək ki, $G_u - T_u(P)$ fəzasının laya toxunan vektorlarından təşkil olunmuş alt fəzadır.

P laylanmasında Γ rabitəsi hər bir $u \in P$ nöqtəsinə $T_u(P)$-dən olan Q_u alt fəzasının elə qarşı qoyulmasıdır ki,

1) $T_u(P) = G_u + Q_u$ (düz cəm);

2) $\forall u \in P, a \in G, \qquad Q_{ua} = (R_a)_* Q_u$, burada $R_a - a \in G$ elementinin P-də doğurduğu çevirmədir: $R_a u = ua$;

3) $Q-$nün $u-$dan asılılığı diferensiallanandır.

2) şərti onu göstərir ki, $u \to Q_u$ paylanması $G-$yə nəzərən invariantdır. G_u-nu $T_u(P)$-də şaquli, Q_u-nu isə üfüqi alt fəza (və ya horizontal alt fəza) adlandıraq. $X \in T_u(P)$ vektoru G_u-ya aid olduqda (uyğun olaraq, Q_u-ya aid olduqda) şaquli (uyğun olaraq, horizontal) vektor adlanır. 1-ci şərtə əsasən, hər bir $X \in T_u(P)$ vektoru yeganə qaydada $X = Y + Z$ şəklində yazıla bilər, burada $Y \in G_u, Z \in Q_u$. Y (uyğun olaraq, Z) X vektoru üçün şaquli (uyğun olaraq, horizontal) komponent adlandırılır və vX (uyğun olaraq, hX) kimi işarə olunur. 3-cü şərt onu göstərir ki, əgər $X-P$ üzərində diferensiallanan vektor meydanıdırsa, onda vX və hX vektor meydanları da diferensuiallanandırlar.

$P-$də verilmiş Γ rabitəsinin köməyi ilə P üzərində qiymətləri G qrupunun g Li cəbrindən olan ω 1-formasını bu şəkildə təyin edək. Hər bir $A \in g$ P üzərində fundamental vektor meydanı adlanan A^* vektor meydanını doğurur. Hər bir $u \in P$ üçün $A \to (A^*)_u - g$-dən G_u-nun üzərinə xətti izomorfizmdir. Hər bir $X \in T_u(P)$ üçün $\omega(X)-$i elə yeganə $A \in g$ kimi təyin edirik ki, $(A^*)_u$ X vektorunun şaquli komponentləri olsun. Aydındır ki. $\omega(X)=0$ şərti yalnız və yalnız X horizontal olduqda doğrudur. ω formasına verilmiş Γ rabitəsinin rabitə forması deyilir.

Teorem. ω rabitə forması aşağıdakı şərtləri ödəyir:

1) $\forall A \in g$ üçün $\omega(A^*)=A;$

2) Hər bir $a \in G$ və P üzərində hər bir X vektor meydanı üçün

$(R_a)^* \omega = ad(a^{-1})\omega,$ yəni

$(R_a^* \omega)(X) = ad(a^{-1}) \cdot \omega(X),$ burada $ad-G$-nin $g-$də birləşdirilmiş təsvirini ifadə edir.

Mühazirə VII

Əyrilik forması və struktur tənliyi

Tutaq ki, $P(M,G)-$baş laylanma, ρ isə G qrupunun V sonlu ölçülü vektorlar fəzası üzərində təsviridir. Hər bir $a \in G$ üçün $\rho(a)$ $V-$də xətti çevirmədir və $a,b \in G$ üçün $\rho(ab)=\rho(a)\rho(b).$ P üzərində (ρ,V) tipli r dərəcəli psevdotenzorial forma P üzərində V-qiymətli elə φ $r-$formasıdır ki,

$$R_a^* \varphi = \rho(a^{-1}) \cdot \varphi, a \in G.$$

Əgər P-də X_i toxunan vektorlarından heç olmazsa biri şaqulidirsə, yəni laya toxunandırsa və bu halda $\varphi(X_1, X_2, ..., X_n) = 0$ olarsa, deyəcəyik ki, φ tenzorial formadır.

Təklif 1. Əgər $\varphi - P$ üzərində (ρ, V) tipli psevdotenzorial r-formadırsa, onda:

(a) $X_i \in T_u(P)$ üçün $(\varphi h)(X_1, ..., X_n) = \varphi(hX_1, ..., hX_n)$ kimi təyin olunan φh forması (ρ, V) tipli tenzorial formadır.

(b) $d\varphi$ (ρ, V) tipli psevdotenzorial (r+1) –formadır.

(c) $D\varphi = (d\varphi)h$ kimi təyin olunan $D\varphi$ (r+1) –forması (ρ, V) tipli tenzorial formadır.

Teorem 1 (struktur tənliyi). Tutaq ki, $\omega -$rabitə forması, Ω isə onun əyrilik formasıdır. Onda $X, Y \in T_u(P), u \in P$ üçün

$$d\omega(X,Y) = -\frac{1}{2}[\omega(X), \omega(Y)] + \Omega(X,Y).$$

Tutaq ki, $e_1, ..., e_r - g$ Li cəbrinin bazisidir və $C^i_{jk} - i, j, k = 1, ..., r -$ struktur sabitləridir, yəni

$$[e_j, e_k] = \sum_i C^i_{jk} e_i, \quad j,k = 1,..,r.$$

Fərz edək ki, $\omega = \sum_i \omega^i e_i, \quad \Omega = \sum_i \Omega^i e_i$. Onda struktur tənliyi bu şəkildə ifadə olunur:

$$d\omega^i = -\frac{1}{2}\sum_{j,k} C^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k + \Omega^i, \quad i = 1, ..., r.$$

Teorem 2 (Bianki eyniliyi). Tutaq ki, $\omega -$rabitə forması, Ω isə onun əyrilik formasıdır. Onda

$$D\omega = 0.$$

Mövzu № VIII

Vektor laylanması. Vektor laylanmasında rabitələr

Vektor laylanması anlayışı. Vektor laylanmasının kəsiyi. Kovariant törəmə. Lay metrikası. Metrik rabitə. Struktur tənliyi.

1. Kobaəsi Ş., Nomidzu K. Osnovı differenüialǧnoy qeometrii. Tom I, Per.s anql., M., Nauka, 1981. s.113-118.
2. Dubrovin B.A., Novikov S.P., Fomenko A.T. Sovremennaə qeometriə. M., 1979. s. 615-619

Mövzu № IX

Xətti rabitələr

Kanonik forma. Xətti rabitə. Standart horizontal vektor meydanı. Buruqluq forması. Birinci və ikinci struktur tənliklər.

.

1. Kobaəsi Ş., Nomidzu K. Osnovı differenüialǧnoy qeometrii. Tom I, Per.s anql., M., Nauka, 1981. s.118-123.
2. Dubrovin B.A., Novikov S.P., Fomenko A.T. Sovremennaə qeometriə. M., 1979. s. 628-633.

Mövzu № X

Afin rabitələr

Toxunan afin fəza. Afin reperi. Ümumiləşmiş afin rabitə. Xarici kovariant diferensiallama. Afin rabitə anlayışı.

1. Kobaəsi Ş., Nomidzu K. Osnovı differenüialǧnoy qeometrii. Tom I, Per.s anql., M., Nauka, 1981. s.128-128.

2. Dubrovin B.A., Novikov S.P., Fomenko A.T. Sovremennaə qeometriə. M., 1979. s. 252-260.

XI Mühazirə

Hamar çoxobrazlının toxunan laylanma fəzası

Tutaq ki, $M - C^{\infty}$ sinfindən olan n-ölçülü diferensiallanan çoxobrazlıdır. Bütün $T_x M,\ x \in M$ toxunan fəzalarının dizyunktiv birləşməsi kimi təyin olunan $T(M)$ çoxluğuna baxaq:

$$T(M) = \bigcup_{p \in M} T_p M .$$

Göründüyü kimi, $T(M)$ çoxluğunun nöqtələri M çoxobrazlısının bütün mümkün toxunan vektorlarıdır. Hər bir $v \in T(M)$ vektoru üçün $v \in T_x M$ şərtini ödəyən $x \in M$ nöqtəsini $\pi(v)$ simvolu ilə işarə edək. Nəticədə hər bir $x \in M$ nöqtəsi üçün $\pi^{-1}(x) \subset T_x M$ xassəsinə malik olan

$$\pi : T(M) \to M$$

inikası təyin olunur. İxtiyari $U \subset M$ açıq çoxluğu üçün $\pi^{-1}(u) \subset T(M)$ alt çoxluğunu $T(U)$ çoxluğu ilə eyniləşdirək. U çoxluğu $(U, h) = (U, x^1, ..., x^n)$ xəritəsinin oblastı olduğu halda ixtiyari $v \in T(U)$ vektorunu

$$Th(v) = (x^1, ..., x^n, v^1, ..., v^n) \in R^{2n}$$

vektoruna çevirən $Th : T(u) \to R^{2n}$ inikası təyin olunur, burada $x^1, ..., x^n - x = \pi(v)$ nöqtəsinin (u, h) xəritəsində koordinatları, $v^1, ..., v^n - v$ vektorunun $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_x, ..., \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_x$ bazisində koordinatlarıdır. Beləliklə,

$$v = v^1 \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_x + ... + v^n \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_x .$$

Qeyd edək ki, $v^1,...,v^n$ ədədləri v vektoru ilə birqiymətli təyin olunurlar. Aydındır ki, Th biyektiv inikasdır və ona görə də $(T(u),Th)$ cütü $T(M)$-də xəritədir. Tutaq ki, (U,h) və $(U',h') - M$ çoxobrazlısının (müəyyənlik üçün kəsişən) iki xəritəsidir və

$$x^{i'} = x^{i'}\left(x^1,...,x^n\right),\ i = 1,...,n\,, \tag{1}$$

uyğun lokal koordinatların keçid düsturlarıdır. ($U \cap U'$ kəsişməsində). Tərifə görə hər bir $x \in U \cap U'$ nöqtəsi üçün ixtiyari $v \in T_x M$ vektorunun (U,h) və (U',h') xəritələrindəki $v^1,...,v^n$ və $v^{1'},...,v^{n'}$ koordinatları arasında

$$v^{i'} = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right)_x v^i \tag{2}$$

münasibəti vardır, burada $\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right)_x$ $-$(1) funksiyalarının xüsusi törəmələrinin x nöqtəsindəki qiymətləridir. Digər tərəfdən, aydındır ki, Th və Th' inikasları

$$T(U \cap U') = T(U) \cap T(U')$$

çoxluğunu $R^{2n} = R \times R$ fəzasına, uyğun olaraq, $h(U \cap U') \times R^n$ və $h'(U \cap U') \times R^n$ açıq çoxluqlarına çevirirlər, belə ki, (1) və (2) düsturları birlikdə birinci çoxluğun ikinci çoxluğa $Th'_o(Th)^{-1}$ inikasını təyin edirlər. Bütün $x \in U \cap U'$ nöqtələri üçün $\det\left\|\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right)_x\right\| \neq o$ olduğundan, alınır ki, bu inikas difeomorfizimdir. Beləliklə, $(T(u),Th)$ və $(T(u'),Th')$ xəritələri bir-biri ilə razılaşdırılmışdır. Aydındır ki, bu nəticə $U \cap U' = \emptyset$ olduqda da doğrudur ($U \cap U' = \emptyset$ olduqda $T(u) \cap T(u') = \emptyset$ olur). Buradan bilavasitə alınır ki, $(T(u),Th)$ şəklində olan xəritələr $T(M)$ üzərində atlas və müəyyən hamar struktur təyin edirlər.

Qurulmuş $T(M)$ hamar çoxobrazlısı M çoxobrazlısının toxunan vektorlarının çoxobrazlısı adlanır. Bu çoxobrazlının ölçüsü 2n-ə bərabərdir, burada n=dim M. $\mu = (T(M), \pi, M)$ üçlüyünə isə M çoxobrazlısının toxunan laylanması deyilir. Bir sıra hallarda M çoxobrazlısının toxunan laylanması olaraq, $T(M)$ fəzası götürülür. Qeyd edək ki, (2) düsturlarında xüsusi törəmələrin varlığına əsasən, $T(M)$ çoxobrazlısının hamarlıq tərtibi M çoxobrazlısının hamarlıq tərtibindən bir vahid azdır.

Tərifə əsasən, $(T(u), Th)$ xəritəsinə uyğun olan lokal koordinatlar $x^1,...,x^n$, $v^1,...,v^n$ ədədləridir. Beləliklə, $x^1,...,x^m$ simvolları həm U ətrafındakı lokal koordinatlar, həm də $T(U)$ ətrafında lokal koordinatların bir hissəsini ifadə edirlər. (1.14) çevirməsinə $T(M)$ toxunan laylanmasında lokal koordinatların

$$\begin{cases} x^{i'} = x^{i'}\left(x^1,...,x^n\right), \\ v^{i'} = \left(\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right) v^i \end{cases} \tag{3}$$

çevirmələri uyğundur.

$x^{\bar{i}} = v^i$, $\bar{i} = n+1,...,2n$ qəbul etməklə, (3) çevirməsini

$$x^{I'} = x^{I'}\left(x^I\right), \; I = 1,2,...,2n$$

şəklinə gətirmək olar.

(3) çevirmələrinin Yakobi matrisi aşağıdakı struktura malikdir:

$$\left(\frac{\partial x^{I'}}{\partial x^I}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} & \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^{\bar{i}}} \\ \dfrac{\partial x^{\bar{i}'}}{\partial x^i} & \dfrac{\partial x^{\bar{i}'}}{\partial x^{\bar{i}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_i^{i'} & o \\ v^k \partial_i A_k^{i'} & A_i^{i'} \end{pmatrix},$$

burada $A_i^{i'} = \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$.

$\pi_o s = id$ şərtini ödəyən kəsilməz $\sigma : M \to T(M)$ inikasına $T(M)$ toxunan laylanmasının kəsiyi deyilir. Qeyd edək ki, $T(M)$ toxunan laylanmasının kəsikləri M çöxobrazlısı üzərində vektor meydanlarıdır.

XII Mühazirə

Toxunan laylanmada vektor meydanının tam və horizontal liftləri

Tutaq ki, C^∞ sinfindən olan n-ölçülü diferensiallanan M çoxobrazlısı verilmişdir. M çoxobrazlısı üzərində ixtiyari X vektor meydanını götürək və onun $\left(U, x^i\right)$ lokal xəritəsindəki koordinatlarını X^i ilə işarə edək. X vektor meydanının $T(M)$ toxunan laylanmasına tam lifti TU koordinat ətrafında verilmiş

$$^cX = \left({}^cX^I\right) = \left({}^cX^i,\ {}^cX^{\bar{i}}\right) = \left(X^i, v^j \partial_j X^i\right) \tag{1}$$

vektor meydanıdır, burada $i = 1,2,\ldots,n,\quad \bar{i} = n+1,\ldots,2n,\ I = 1,2,\ldots,2n.$ (1) şəklində ${}^cX$ tam liftinin vektor meydanı təyin etməsi

$$^cX^{I'} = \frac{\partial x^{I'}}{\partial x^I}\,{}^cX^I$$

bərabərliyinin ödənilməsi yolu ilə əsaslandırılır, burada $\left(\dfrac{\partial x^{I'}}{\partial x^I}\right)$ $T(M)$ toxunan laylanmasının lokal koordinatlarının

$$\begin{cases} x^{i'} = x^{i'}\left(x^1,\ldots,x^n\right), \\ v^{i'} = \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} v^i \end{cases}$$

çevirməsinin Yakobi matrisidir, yəni

$$\left(\frac{\partial x^{I'}}{\partial x^I}\right) = \begin{pmatrix} A_i^{i'} & 0 \\ \rho_j \partial_i A_{i'}^j & A_{i'}^i \end{pmatrix}.$$

M çoxobrazlısı üzərində ∇ afin rabitəsi verildiyi halda $\forall W \in X(M)$ vektor meydanının $T(M)$ toxunan laylanmasında horizontal lifti TU koordinat ətrafında verilmiş

$$^{H}W = \left({}^{H}W^{i}, {}^{H}W^{\bar{i}}\right) = \left(W^{i}, -\Gamma_{kj}^{i} V^{j} V^{k}\right) \tag{2}$$

vektor meydanıdır, burada Γ_{kj}^{i} ∇ afin rabitəsinin əmsallarıdır. (2) şəklində ${}^{H}W$ horizontal liftinin vektor meydanı təyin etməsi

$${}^{H}W^{I'} = \frac{\partial x^{I'}}{\partial x^{I}} {}^{H}W^{I}$$

bərabərliyinin ödənilməsi yolu ilə əsaslandırılır.

Mühazirə XIII

Toxunan laylanmada tenzor meydanının tam və horizontal liftləri

Tutaq ki, C^{∞} sinfindən olan n-ölçülü diferensiallanan M çoxobrazlısı verilmişdir. M çoxobrazlısı üzərində ixtiyari F afinor meydanını götürək və onun $\left(U, x^{i}\right)$ lokal xəritəsindəki koordinatlarını F_{i}^{j} ilə işarə edək. F afinor meydanının $T(M)$ toxunan laylanmasında tam lifti TU koordinat ətrafında

$$\begin{aligned} &{}^{c}F_{i}^{j} = F_{i}^{j},\ {}^{c}F_{i}^{j} = 0,\ {}^{c}F_{i}^{j} = v^{m}\partial_{m}F_{i}^{j} \\ &{}^{c}F_{\bar{i}}^{\bar{j}} = F_{i}^{j}. \end{aligned} \tag{1}$$

şəklində təyin olunan afinor meydanıdır, burada $i = 1,2,...,n,\quad \bar{i} = n+1,...,2n,\ I = 1,2,...,2n.$ (1) şəklində ${}^{c}F$ tam liftinin afinor meydanı təyin etməsi

$${}^{c}F_{I'}^{J'} = \frac{\partial x^{J'}}{\partial x^{J}} \frac{\partial x^{I}}{\partial x^{I'}} {}^{c}F_{I}^{J}$$

bərabərliyinin ödənilməsi yolu ilə əsaslandırılır, burada $\left(\dfrac{\partial x^{I'}}{\partial x^{I}}\right)$ $T(M)$ toxunan laylanmasının lokal koordinatlarının

$$\begin{cases} x^{i'} = x^{i'}\left(x^1,\dots,x^n\right), \\ v^{i'} = \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} v^i \end{cases}$$

çevirməsinin Yakobi matrisidir, yəni

$$\left(\frac{\partial x^{I'}}{\partial x^{I}}\right) = \begin{pmatrix} A_i^{i'} & 0 \\ \rho_j \partial_i A_{i'}^j & A_{i'}^i \end{pmatrix}.$$

M çoxobrazlısı üzərində ∇ afin rabitəsinin verildiyi halda F afinor meydanının $T(M)$ toxunan laylanmasında horizontal lifti TU koordinat ətrafında

$$\begin{aligned} &{}^hF_i^j = F_i^j, \qquad {}^hF_{\bar{i}}^j = 0, \qquad {}^hF_i^{\bar{j}} = v^m F_r^j \Gamma_{mi}^r - v^m F_i^r \Gamma_{mr}^j, \\ &{}^hF_{\bar{i}}^{\bar{j}} = F_i^j. \end{aligned} \tag{2}$$

şəklində təyin olunan afinor meydanıdır, burada $i = 1,2,\dots,n,\quad \bar{i} = n+1,\dots,2n,\ I = 1,2,\dots,2n.$

(2) şəklində ${}^hF$ horizontal liftinin afinor meydanı təyin etməsi

$${}^hF_{I'}^{J'} = \frac{\partial x^{J'}}{\partial x^{J}} \frac{\partial x^{I}}{\partial x^{I'}} {}^hF_I^J$$

bərabərliyinin ödənilməsi yolu ilə əsaslandırılır.

Mühazirə XIV

Toxunan laylanmada afin rabitənin tam və horizontal liftləri

Tutaq ki, C^{∞} sinfindən olan n-ölçülü diferensiallanan M çoxobrazlısı verilmişdir. M çoxobrazlısı üzərində ∇ afin rabitəsinə baxaq. ∇ afin rabitəsinin M hamar çoxobrazlısının $T(M)$ toxunan laylanmasında tam lifti

$$^{c}(\nabla_X Y) = {}^{c}\nabla_{^{c}X}\, {}^{c}Y \qquad (1)$$

bərabərliyi ilə təyin olunur, burada $X, Y - M$ hamar çoxobrazlısı üzərində verilmiş vektor meydanlarıdır, $^{c}X, {}^{c}Y$ isə onların $T(M)$ toxunan laylanmasında tam liftləridir, $^{c}\nabla$ isə ∇ afin rabitəsinin $T(M)$ toxunan laylanmasında tam liftidir.

Əgər $\Gamma_{ij}^{k} - \nabla$ afin rabitəsinin əmsallarıdırsa, onda (1) bərabərliyindən $^{c}\nabla$ tam liftinin sıfırdan fərqli əmsallarının aşağıdakı ifadələri alınır:

$$^{c}\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ij}^{k}, \quad {}^{c}\Gamma_{\bar{i}j}^{\bar{k}} = {}^{c}\Gamma_{i\bar{j}}^{\bar{k}} = \Gamma_{ij}^{k}, \quad {}^{c}\Gamma_{ij}^{\bar{k}} = v^{m}\partial_{m}\Gamma_{ij}^{k},$$

burada $v^{m} - T(M)$ toxunan laylanmasının lay koordinatlarıdır.

∇ afin rabitəsinin M hamar çoxobrazlısının $T(M)$ toxunan laylanmasında horizontal lifti isə

$$^{h}(\nabla_X Y) = {}^{h}\nabla_{^{h}X}\, {}^{h}Y, \qquad {}^{v}(\nabla_X Y) = {}^{h}\nabla_{^{h}X}\, {}^{v}Y,$$

$$^{h}\nabla_{^{v}Y}\, {}^{h}X = 0, \qquad {}^{h}\nabla_{^{v}X}\, {}^{v}Y = 0 \qquad (2)$$

bərabərlikləri ilə təyin olunur, burada $X, Y - M$ hamar çoxobrazlısı üzərində verilmiş vektor meydanlarıdır, $^{v}X, {}^{v}Y, {}^{h}X, {}^{h}Y$ isə onların $T(M)$ toxunan laylanmasında uyğun olaraq, şaquli və horizontal liftləridir.

(2) bərabərliklərindən müəyyən edilir ki, ∇ afin rabitəsinin M hamar çoxobrazlısının $T(M)$ toxunan laylanmasında ${}^h\nabla$ horizontal liftinin əmsalları onun həmin laylanmadakı ${}^c\nabla$ tam liftinin əmsallarından yalnız

$$ {}^h\Gamma_{ij}^{\bar{k}} = v^m(\partial_i \Gamma^k_{jm} + \Gamma^k_{ir}\Gamma^r_{jm} - \Gamma^i_{rm}\Gamma^r_{ij} $$

komponentlər seriyası ilə fərqlənirlər.

Mühazirə XV

Kotoxunan vektorların laylanma fəzası

M hamar çoxobrazlısının bütün nöqtələrində (r,s) tipli tenzorlar çoxluğuna baxaq:

$$ T_s^r(M) = \bigcup_{p\in M} T_s^r(p), $$

burada $T_s^r(p)$ - $p \in M$ nöqtəsində (r,s) tipli tenzorlar fəzasıdır. $\pi : T_s^r(M) \to M$ proyeksiyası misal 2-də olduğu kimi daxil edilir, yəni (r,s) tipli hər bir $t \in T_s^r(M)$ tenzoruna bu tenzorun tətbiq olduğu nöqtə qarşı qoyulur. $p \in M$ nöqtəsi üzərində $\pi^{-1}(p)$ layı dedikdə p nöqtəsində (r,s) tipli tenzorların $T_s^r(p)$ fəzası nəzərdə tutulur. Asanlıqla yoxlanılır ki, $(T_s^r(M), \pi, M)$ üçlüyü vektor laylanmasıdır. Bu laylanmaya M çoxobrazlısı üzərində (r,s) tipli tenzorların laylanması deyilir.

Xüsusi hala baxaq. Tutaq ki, $r=0,\ s=1$. Bu halda M hamar çoxobrazlısı üzərində (*0,1*) tipli tenzorların (kotoxunan vektorların) ${}^cT(M)$ laylanmasını alarıq. Bu laylanma fəzasını kotoxunan laylanma fəzası adlandırırlar. ${}^cT(M)$ kotoxunan laylanmasının nöqtəsi $p \in M$ nöqtəsində

(0,1) tipli tenzor (kotoxunan vektor) olduğundan ${}^{C}T(M)$ kotoxunan laylanmasında lokal koordinatlar aşağıdakı kimi təyin olunurlar:

$$(x^{I}) = (x^{i}, x^{\bar{i}}) = (x^{i}, \rho_{i}), \tag{1}$$

burada

$$I = \overline{1,2n},\ i,= \overline{1,n},\ \bar{i} = \overline{n+1,2n},\ x^{\bar{i}} = \rho_{i}.$$

(1) koordinatları aşağıdakı qayda ilə çevrilirlər:

$$\begin{cases} x^{i'} = x^{i'}(x^{1}, x^{2}, ..., x^{n}), \\ x^{i'} = \rho_{i'} = \dfrac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}} \rho_{i}, \end{cases} \tag{2}$$

və ya

$$x^{I'} = x^{I'}(x^{1}, ..., x^{2n}), \tag{3}$$

burada $I = 1,2,...,2n$.

(2) və ya (3) çevirməsinin Yakobi matrisinin strukturu aşağıdakı kimidir:

$$\left(\frac{\partial x^{I'}}{\partial x^{I}}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}} & \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^{\bar{i}}} \\ \dfrac{\partial x^{\bar{i}'}}{\partial x^{i}} & \dfrac{\partial x^{\bar{i}'}}{\partial x^{\bar{i}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{i}^{i'} & 0 \\ \rho_{k} \partial_{i} A_{i'}^{k} & A_{i'}^{i} \end{pmatrix} \tag{4}$$

burada $A_{i'}^{i} = \dfrac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}}$ işarə olunmuşdur. (4)-dən göründüyü kimi,

$$\det\left(\frac{\partial x^{I'}}{\partial x^{I}}\right) = \det(A_{i}^{i'}) \det A_{i'}^{i} \neq 0.$$

Bu isə onu göstərir ki, ${}^{C}T(M)$- $2n$-ölçülü diferensiallanan çoxobrazlıdır.